Metrické prostory - problémky k promyšlení

a) příklady metrik:

1. Zopakujme si definici metriky a metrického prostoru .
   Ukažme pak, že nezápornost metriky už plyne z ostatních axiomů v definici metriky.

2. Uvažujme prostory R^n a v nich metriky:
   $$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k| \ , \ d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2} \quad \text{(Euklidovská metrika) a}$$
   $$d_{\max}(x,y)=\max_k |x_k-y_k| .$$
   Ověřme axiomy metrik $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ i $d_{\max}(x,y)$.

3. V prostoru $C[a,b]$ uvažujme metriky $d(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ a $d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$
   a ověřme opět axiomy metrik $d(f,g)$ a $d_1(f,g)$ (u ověření axiomů u $d_1(f,g)$ budeme asi potřebovat některé vlastnosti určitého integrálu).
   Metrikou v prostoru $C[a,b]$ bude i $d_2(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Pokud se v prostoru $R[a,b]$ pokusíme a zavedení metriky $d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$, který axiom metriky nebude splněn? Umíte „upravit“ prostor $R[a,b]$ tak, aby $d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$ byla už metrika?

5*. Zkuste dokázat , že v lineárním prostoru V se skalárním součinem $\langle u,v\rangle$ a normou $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ platí $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ (Cauchy - Schwarzova nerovnost) a dále pak ověřit platnost axiomů metriky, pokud v prostoru V definujeme metriku $d(u,v)=\|u-v\|$.
   Příklady :
   a) prostor R^n s euklidovskou metrikou;
   b) prostor $C[a,b]$ s metrikou $d_2(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f(x)-g(x)|^2dx}$;
   c) prostor l^2 všech posloupností reálných čísel $x=\{x_n\}$, pro které $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ konverguje,
   se skalárním součinem $\langle u,v\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot y_n$, s metrikou $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$, $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$;

b) příklady konvergence v metrickém prostoru:

1. a) Ukažte, že konvergence v prostoru R^n s metrikami $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ i $d_{\max}(x,y)$ je konvergence „po složkách".

   b) Ukažte, že metriky (v prostoru R^n) $d_1(x,y)$, $d_2(x,y)$ $d_{\max}(x,y)$ jsou silně ekvivalentní.

2. a) Promyslete, co „znamená" v prostoru $C[a,b]$ (prostor funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$) s metrikou $d_{\max}(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ konvergence posloupnosti $\{f_n\}$.

   (Platí : $\lim f_n = f$ v $C[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [a,b]$: $\lim f_n(x) = f(x)$?)

   b) Jak „vypadá" koule v prostoru ($C[a,b], d_{\max}$) ?

3*. Buď M množina všech omezených posloupností $x=\{x_n\}$ reálných čísel. Je-li $x,y\in M$, ukažte, že $d(x,y)=\sup_{n\in N}|x_n-y_n|$ je metrika v M (užívá se označení (l_∞, d_∞)).

   Co zde „znamená" $\lim x^{(k)} = x$?

c) množiny v metrickém prostoru:

1. Zopakujte si pojmy množina otevřená, uzavřená v (M,d) ((M,d) - metrický prostor), uzávěr množiny, vnitřní bod, hraniční bod, limitní (někdy se nazývá hromadný) bod množiny.

   Ukažte:

   a) $X \subset (M,d)$ je uzavřená množina $\Leftrightarrow$ $M-X$ je množina otevřená;

   b) $a \in M$ je hromadný bod množiny X $\Leftrightarrow$ pro každou kouli $B(a,r)$, r >0, je množina $B(a,r)\cap X$ nekonečná;

   c) $a \in M$ je hromadný bod množiny X, $a \notin X$ $\Rightarrow$ a je hraničním bodem množiny X .

   A ještě

   d) je-li a je hraničním bodem množiny X, musí být hromadným bodem množiny X ?

2. Rozhodněte, zda platí tvrzení (buď dokažte, že platí, nebo pomocí příkladu ukažte, že tvrzení neplatí):
   a) sjednocení spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   b) průnik spočetně mnoha otevřených množin je otevřená množina;
   c) sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina;
   d) průnik spočetně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

3. Rozhodněte, zda množina $X=\{[x,y,z]\in R^3; x^2+y^2+z^2\le 2 \ \&\ z > x^2+y^2\}$ je uzavřená nebo otevřená. Odůvodněte. Najděte uzávěr $\overline{X}$ množiny X .

4. Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout. Pokuste se také rozhodnout, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp.uzavřená, omezená, co je hranicí a uzávěrem zkoumaného definičního oboru:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\ ;\quad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}\ ;\quad f(x,y)=\ln(y-x^2)\ ;\quad f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}\ ;$$

$$f(x,y)=\sqrt{2-\frac{y}{x-1}}\ ;\quad f(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x+1}\right)\ ;\quad f(x,y)=\ln\left(\sqrt{y+1}-x\right);$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}\ ;\quad f(x,y,z)=\frac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)}$$